1　$(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}+\boxed{\text{ウ}}$

$(\sqrt{2}-\sqrt{6})^3 = \boxed{\text{エ}}\sqrt{6}+\boxed{\text{オ}}\sqrt{2}$

$\dfrac{\sqrt{6}}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)} = \boxed{\text{カ}}$

2　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，不等式 $-2\sin^2\theta + 8\cos^2\theta - \cos\theta \leqq 1$ を満たす $\cos\theta$ の範囲は

$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \leqq \cos\theta \leqq \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

また，これを満たす θ について，$\sin\theta$ の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

3　頂点の座標が $(3, 2)$ である 2 次関数の方程式は $y = a\left(x - \boxed{\text{ア}}\right)^2 + \boxed{\text{イ}}$ とあらわされる。このグラフが x 軸を切り取る線分の長さ，すなわちこのグラフと x 軸との 2 つの交点の距離が 8 になるのは

$a = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ のときで，このグラフと y 軸との交点の座標は

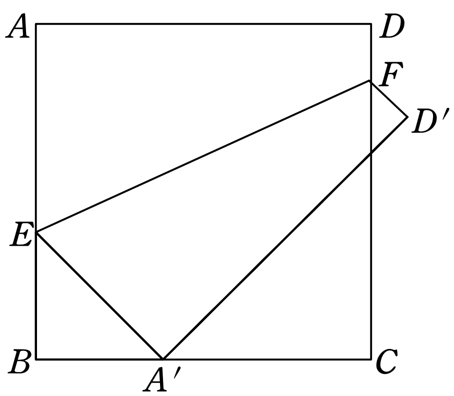
$\left(0, \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right)$ となる。さらに，この交点が原点に重なるようにグラフを平行移動したとき，このグラフが x 軸を切り取る線分の長さは $\boxed{\text{キ}}$ である。

4　一辺の長さが 2 の正方形 $ABCD$ がある。辺 AB 上に点 E, 辺 CD 上に点 Fをとり，正方形を線分 EF で折り返したとき点 A が辺 BC 上の点 A' に重なったとする。

$BE = BA'$ のとき $BE : EA' = 1 : \sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ となり，

$AE = \boxed{\text{イ}} - \boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ となる。

このとき重なった部分の面積は $\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}} - \boxed{\text{キ}}$ である。

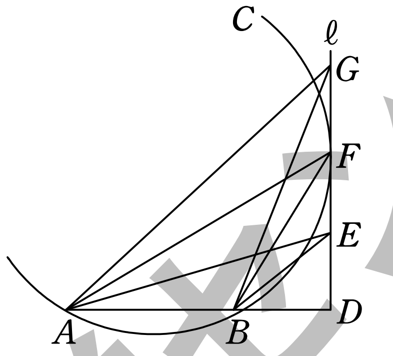


5 長さ 10 の線分 AB がある。AB の延長上で $BD=8$ となる位置に点 D をとり，D を通る垂線 ℓ 上に点 P を $\angle APB$ が最大になるようにとる。このときの PD の長さを求めたい。図のように点 A および点 B を通って直線 ℓ と接する円 C をとる。図より点 P を ア にとるときに $\angle APB$ が最大となる。

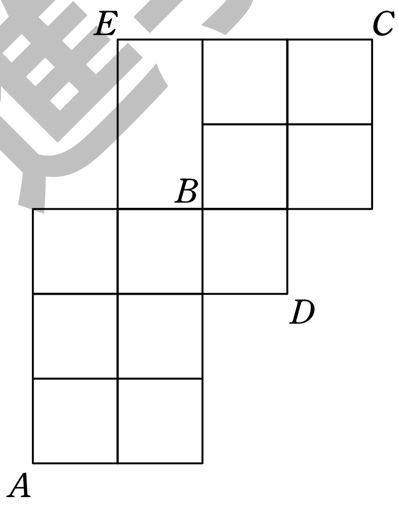
(a) 点 D　　(b) 点 E　　(c) 点 F　　(d) 点 G

円 C の中心を O とすると，円 C の半径は $OA=OB=OP=$ イ，点 O と線分 AB の距離は ウ である。よって $PD=$ エ である。

このとき $AP=$ オ $\sqrt{\text{カ}}$, $\sin\angle APB=\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}$ となる。



6 ある住宅地の道路地図が下図で与えられている。



A から B への最短経路は ア 通りあり，A から B を通って C にいたる最短経路は イ 通りある。また，A から E を通って C へいたる最短経路は ウ 通り，A から D を通って C へいたる最短経路は エ 通りある。したがって A から C への最短経路は全部で オ 通りある。

$\boxed{7}$ 各辺の長さが 4 の正四面体 $ABCD$ がある。この四面体の底面の三角形 BCD の面積は

$\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$ であり，四面体の高さは $\dfrac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$ である。

AB 上で A から 1 の距離にある点を E, AC 上で A から 2 の距離にある点を F とすると，三角形

AEF の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}$ であり，三角錐 $AEFD$ の体積は $\dfrac{\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}$ である。

また，$\cos\angle ADE=\dfrac{\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}$, $\cos\angle EDF=\dfrac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}}$ である。

$\boxed{1}$ 答　ア＝4　イ＝3　ウ＝8　エ＝−12　オ＝20　カ＝3

$(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2=(\sqrt{2})^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2=4\sqrt{3}+8$

$(\sqrt{2}-\sqrt{6})^3=(\sqrt{2})^3-3\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{6}+3\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{6})^2-(\sqrt{6})^3=-12\sqrt{6}+20\sqrt{2}$

$$\frac{\sqrt{6}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}=\sqrt{6}\div\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=3$$

$\boxed{2}$ 答　$\dfrac{ア}{イ}=\dfrac{-1}{2}$　$\dfrac{ウ}{エ}=\dfrac{3}{5}$　$\dfrac{オ}{カ}=\dfrac{4}{5}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より，$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ を与式に代入すると，

$$-2(1-\cos^2\theta)+8\cos^2\theta-\cos\theta\leqq 1$$
$$10\cos^2\theta-\cos\theta-3\leqq 0$$
$$(2\cos\theta+1)(5\cos\theta-3)\leqq 0$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ より，$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ であるから，

$$-\frac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq\frac{3}{5}$$

ここで，$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ のとき，$\sin\theta$ の値は 90° を境に同じ割合で増減しているので，$|\cos\theta|$ の値が最大になるときに$\sin\theta$ の値は最小となる。従って，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ のときに最小値をとる。このとき，

$$\sin^2\theta=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ より，$0\leqq\sin\theta\leqq 1$ であるから，

$$\sin\theta=\frac{4}{5}$$

$\boxed{3}$ 答　ア＝3　イ＝2　$\dfrac{ウ}{エ}=\dfrac{-1}{8}$　$\dfrac{オ}{カ}=\dfrac{7}{8}$　キ＝6

頂点の座標が $(3,2)$ であることから，この 2 次関数の方程式は次のように表される。

$$y=a(x-3)^2+2$$
$$=ax^2-6ax+9a+2 \qquad \cdots\cdots①$$

ここで，頂点の座標が $(3,2)$ グラフが x 軸から切り取る線分があることからグラフは上に凸であるので $a<0$ である。グラフが x 軸から切り取る線分の長さを d とおくと，

$$d=\frac{2\sqrt{(-3a)^2-a(9a+2)}}{|a|}$$
$$=\frac{2\sqrt{-2a}}{|a|}$$
$$8=\frac{2\sqrt{-2a}}{|a|}$$
$$16a^2=-2a$$
$$8a^2+a=0$$
$$a(8a+1)=0$$
$$a=-\frac{1}{8},0$$

$a<0$ より，

$$a=-\frac{1}{8}$$

このとき，$a=-\frac{1}{8}$ を①に代入すると，

$$y=-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}$$

従って，このグラフと y 軸との交点の座標は $\left(0\,,\frac{7}{8}\right)$ である。

この交点が原点に重なるように平行移動する，つまり y 軸方向に $-\frac{7}{8}$ だけ平行移動すると，

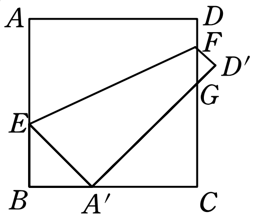
$$y-\left(-\frac{7}{8}\right)=-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}$$

$$y=-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{4}x$$

$$=-\frac{1}{8}x(x-6)$$

よって，平行移動後のグラフの x 軸との交点の座標は $(0\,,0)\,,(6\,,0)$ である。従って，x 軸から切り取る線分の長さは 6 となる。

4 答　ア＝2　イ＝4　ウ＝2　エ＝2　オ＝18　カ＝2　キ＝24



右図のように点 G をおく。

問題文より $\triangle BA'E$ は直角二等辺三角形であるから，

$$BE:EA'=1:\sqrt{2}$$

$EA=EA'$ より，

$$EA:EB=1:\sqrt{2}$$

$$AE=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}AB=4-2\sqrt{2}$$

また，

$$EA'=CA'=CG=4-2\sqrt{2}$$

$\triangle CA'G$ も直角二等辺三角形であるから，

$$CA':A'G=1:\sqrt{2}$$

$$A'G=\sqrt{2}\,CA'=4\sqrt{2}-4$$

$$GD'=2-(4\sqrt{2}-4)=6-4\sqrt{2}$$

$\triangle GD'F$ も直角二等辺三角形であるから，

$$D'G=D'F=6-4\sqrt{2}$$

従って，重なった部分の面積を S とすると，

$$S=(\text{台形 } A'D'FE)-\triangle GD'F$$

$$=\{(6-4\sqrt{2})+(4-2\sqrt{2})\}\times 2\times\frac{1}{2}-(6-4\sqrt{2})^2\times\frac{1}{2}$$

$$=(10-6\sqrt{2})-(34-24\sqrt{2})$$

$$=18\sqrt{2}-24$$

5 答　ア＝(c)　イ＝13　ウ＝12　エ＝12　オ＝6　カ＝13　$\frac{キ}{ク}=\frac{5}{13}$

円周上の 2 定点からつくる角の大小関係は，(円内の角)＞(円周角)＞(円外の角) となるから，点 P を点 F(c) の位置にとったときに $\angle APB$ が最大となる。

円の中心から弦に下ろした垂線は弦の垂直二等分線となるから，弦 AB の中点を M とすると $AM=BM=5$ である。

また，円の中心から接点に引いた線は接線の垂線となるから，四角形 $OMDF$ は長方形である。よって，

$$OP=MD=5+8=13$$

直角三角形 OMB において三平方の定理より，

$$OM=\sqrt{13^2-5^2}=12$$

従って，

$$PD=OM=12$$

直角三角形 PAD において三平方の定理より，

$$AP=\sqrt{18^2+12^2}=6\sqrt{13}$$

直角三角形 PBD において三平方の定理より，

$$BP=\sqrt{12^2+8^2}=4\sqrt{13}$$

$\triangle APB$ において余弦定理より，

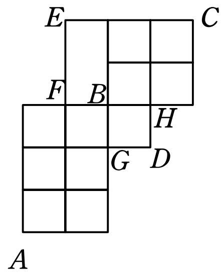
$$\cos\angle APB=\frac{(6\sqrt{13})^2+(4\sqrt{13})^2-10^2}{2\cdot 6\sqrt{13}\cdot 4\sqrt{13}}$$
$$=\frac{12}{13}$$

三角形の内角であるから $0°<\angle APB<180°$ であり，$0<\sin\angle APB\leqq 1$ であるから，三角比の相互関係より，

$$\sin\angle APB=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$$

6 答　ア＝10　イ＝60　ウ＝4　エ＝18　オ＝82

右図のように点 F ～ H をおく。



A から B への最短経路は，右が 2 マス，上が 3 マスであるから，

$$\frac{5!}{2!3!}=10 \quad (\text{通り})$$

B から C への最短経路は，右が 2 マス，上が 2 マスであるから，

$$\frac{4!}{2!2!}=6 \quad (\text{通り})$$

よって，A から B を通って C に至る最短経路は，

$$10\times 6=60 \quad (\text{通り}) \qquad \cdots\cdots①$$

A から F への最短経路は，右が 1 マス，上が 3 マスであるから，

$$\frac{4!}{3!}=4 \quad (\text{通り})$$

F から E を通って C に至る最短経路は 1 通りしかない。

よって，A から E を通って C に至る最短経路は，

$$4\times 1=4 \quad (\text{通り}) \qquad \cdots\cdots②$$

A から G への最短経路は，右が 2 マス，上が 2 マスであるから，

$$\frac{4!}{2!2!}=6 \quad (\text{通り})$$

G から D を通って H に至る最短経路は 1 通りしかない。

H から C への最短経路は，右が 1 マス，上が 2 マスであるから，

$$\frac{3!}{2!}=3 \quad (\text{通り})$$

よって，A から D を通って C に至る最短経路は，

$$6\times1\times3=18 \quad (\text{通り}) \qquad \cdots\cdots③$$

従って，A から C へ至る最短経路は，①〜③より

$$60+4+18=82 \quad (\text{通り})$$

$\boxed{7}$ 答　ア$=4$　イ$=3$　$\dfrac{ウ\sqrt{エ}}{オ}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$　$\dfrac{\sqrt{カ}}{キ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\dfrac{ク\sqrt{ケ}}{コ}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　$\dfrac{サ\sqrt{シ}}{ス}$

$=\dfrac{7\sqrt{13}}{26}$

$\dfrac{セ\sqrt{ソ}}{タ}=\dfrac{11\sqrt{39}}{78}$

$\triangle BCD$ の面積は，

$$\triangle BCD=\frac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot\sin60^\circ=4\sqrt{3}$$

$\triangle BCD$ の外接円の半径を R とする。$\triangle BCD$ において正弦定理より，

$$2R=\frac{4}{\sin60^\circ}$$
$$R=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$\triangle BCD$ の外接円の中心を O とする。直角三角形 OAB において三平方の定理より，

$$AO=\sqrt{4^2-\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

また，$\triangle AEF$ の面積は，

$$\triangle AEF=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\triangle AEF$ において余弦定理より，

$$\begin{aligned}EF^2&=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\cos60^\circ\\&=3\end{aligned}$$

EF は長さなので $EF>0$ より，

$$EF=\sqrt{3}$$

正四面体 $ABCD$ の体積を V とすると，

$$V=4\sqrt{3}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$$

頂点 A を共有する正四面体 $ABCD$ と三角錐 $AEFD$ の体積比は，

$$\begin{aligned}(\text{正四面体 }ABCD):(\text{三角錐 }AEFD)&=AB\cdot AC\cdot AD:AE\cdot AF\cdot AD\\&=64:8\\&=8:1\end{aligned}$$

従って，三角錐 $AEFD$ の体積を V' とすると，

$$V'=\frac{1}{8}V=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\triangle ADE$ において余弦定理より，

$$DE^2=1^2+4^2-2\cdot1\cdot4\cdot\cos60^\circ=13$$

DE は長さなので $DE>0$ より,

$$DE=\sqrt{13}$$

$\triangle ADE$ において余弦定理より,

$$\cos\angle ADE=\frac{4^2+(\sqrt{13})^2-1^2}{2\cdot 4\cdot\sqrt{13}}=\frac{7\sqrt{13}}{26}$$

$\triangle ADF$ において余弦定理より,

$$DF^2=2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cdot\cos 60^\circ=12$$

DF は長さなので $DF>0$ より,

$$DF=2\sqrt{3}$$

$\triangle DEF$ において余弦定理より,

$$\cos\angle EDF=\frac{(\sqrt{13})^2+(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}{2\cdot\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{11\sqrt{39}}{78}$$