

- 1 (1) $2x^3 + x^2 - 7x - 6$ を実数の範囲で因数分解すると である.
- (2) 2 点 $A(3, 1)$, $B(-2, -2)$ を結ぶ線分 AB を $2:1$ に内分する点の座標は , である.
- (3) 関数 $y = 2x^3 + 4x + 5$ を微分すると $y' =$ である.
- (4) 方程式 $\log_3(x-1) + \log_3(x+3) = 1$ を解くと $x =$ である.
- (5) 5 個の数字 $0, 1, 2, 3, 4$ の中から選んだ異なる 3 個の数を並べてできる 3 桁の整数は 個 ある.
- (6) $y = 3\sin x + 2\cos x$ の最大値は である.
- (7) $\frac{3-i}{2+i} =$ $+$ i である. ただし, , は実数とし, i は虚数単位とする.

- 2 $\triangle ABC$ において, $BC=4$, $\angle A=90^\circ$, $\angle B=\theta$ ($0^\circ < \theta \leq 45^\circ$) とする. 点 D は辺 AB 上に, 点 E, F は辺 BC 上に, 点 G は辺 AC 上にあり, 四角形 $DEFG$ が長方形になるように定める. $DG=x$ とする.

(1) $AB =$, $DE =$.

- (2) 長方形 $DEFG$ の面積を S とすると, $S =$ である. 点 D が辺 AB 上を動くとき, S を最大

とする x の値は であり, このとき, $S =$ である. さらに, S の最大値が 1 のとき

$\theta =$ $^\circ$ であり, $\triangle GFC$ の面積は である.

3 a, b を正の実数とし、 $a > b$ とする。また、 k を自然数とする。

(1) $a^2 - b^2, 2ab$ を直角三角形の直角をはさむ 2 辺の長さとしたとき、斜辺の長さは である。

(2) 連立方程式

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3k \\ 2ab = 4k \end{cases}$$

を考える。 a, b を k を用いて表すと、 $a = \text{$ 、 $b = \text{$ となる。

a, b が共に自然数となるような最小の k は である。

(3) 連立方程式

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 12k \\ 2ab = 5k \end{cases}$$

を考える。このとき、 $\frac{a}{b} = \text{$ である。

a, b が共に自然数となるような k のうち 2 番目に小さい k は

である。このとき $a = \text{$,

$b = \text{$ である。

1 解答

$$(1) \quad 2x^3 + x^2 - 7x - 6 = (x+1)(2x^2 - x - 6) \\ = (x+1)(x-2)(2x+3) \quad \dots\dots \text{答}$$

$$(2) \quad \left(\frac{(1 \times 3 + 2 \times (-2))}{2+1}, \frac{1 \times 1 + 2 \times (-2)}{2+1} \right) \quad \text{より} \quad \left(-\frac{1}{3}, -1 \right) \quad \dots\dots$$

答

$$(3) \quad y' = 6x^2 + 4 \quad \dots\dots \text{答}$$

$$(4) \quad \text{真数条件から} \quad x-1 > 0 \quad \text{かつ} \quad x+3 > 0 \quad \text{より} \quad x > 1$$

$$\text{与えられた方程式は} \quad \log_3(x-1)(x+3) = 1 \quad \text{より}$$

$$(x-1)(x+3) = 3$$

$$x^2 + 2x - 6 = 0$$

$$x > 1 \quad \text{より} \quad x = -1 + \sqrt{7} \quad \dots\dots \text{答}$$

(4) 百の位，十の位，一の位の数の並べ方は，それぞれ 4 通り，4 通り，3 通りずつであるから，積の法則により

$$4 \times 4 \times 3 = 48 \text{個} \quad \dots\dots \text{答}$$

(5) 三角関数の合成を用いて，

$$y = 3\sin x + 2\cos x = \sqrt{13} \sin(x + \alpha) \quad (\text{ただし } \alpha \text{ は，}$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}, \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \text{ を満たす。})$$

と変形できる。 $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1$ であるから， $-\sqrt{13} \leq y \leq \sqrt{13}$

よって，最大値は $\sqrt{13}$ $\dots\dots \text{答}$

$$(6) \quad \frac{3-i}{2+i} = \frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{7-5i}{5} = \frac{7}{5} + (-1)i \quad \dots\dots \text{答}$$

2 解答

(1) $AB=4 \cos \theta$ 答 ア

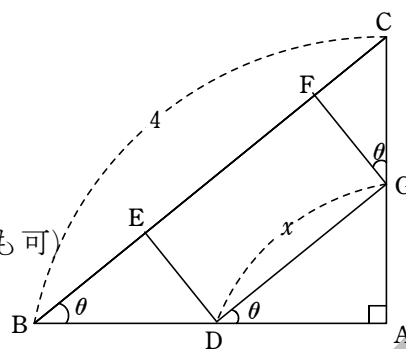
$$DE=BD \sin \theta$$

$$=(AB-AD) \sin \theta$$

$$=(4 \cos \theta - DG \cos \theta) \sin \theta$$

$$=(4-x) \sin \theta \cos \theta \quad (\text{ここまでも可})$$

$$=\frac{1}{2}(4-x) \sin 2\theta \quad \dots\dots \text{答 イ}$$



(2) $S=DG \times DE$

$$=x \times \frac{1}{2}(4-x) \sin 2\theta = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x) \sin 2\theta \quad \dots\dots \text{答 ウ}$$

$$S = -\frac{1}{2} \sin 2\theta \times (x-2)^2 + 2 \sin 2\theta$$

より, S を最大にする x の値は $x=2$ 答 エ

このとき, $S=2 \sin 2\theta$ 答 オ

さらに, S の最大値が 1 のとき $2 \sin 2\theta = 1$

より $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$

$0^\circ < \theta \leq 45^\circ$ より $0^\circ < 2\theta \leq 90^\circ$ であるから, $2\theta = 30^\circ$

$\therefore \theta = 15^\circ$ 答 カ

$$\triangle GFC = \frac{1}{2} \times GF \times GC \sin \theta$$

$$GC = AC - AG$$

$$=AB \sin \theta - x \sin \theta = 4 \sin \theta - 2 \sin \theta = 2 \sin \theta$$

$$GF = CG \cos \theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\triangle GFC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \sin^2 \theta = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{4}(1 - \cos 30^\circ) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{8} \quad \dots\dots \text{答 キ}$$

(どうしても, $\frac{2 - \sqrt{3}}{16}$ にならない?)

3 解答

(1) 斜辺を ℓ とすると、三平方の定理から

$$\ell = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2} = \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} = \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = a^2 + b^2 \quad \dots\dots\text{答}$$

$$(2) \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 3k & \dots\dots\text{①} \\ 2ab = 4k & \dots\dots\text{②} \end{cases}$$

①と②について、 $k > 0$ と(1)の結果から $a^2 + b^2 = 5k \quad \dots\dots\text{③}$

①と③、 $a > b > 0$ より $a^2 = 4k, b^2 = k$

$$\therefore a = 2\sqrt{k}, b = \sqrt{k} \quad \dots\dots\text{答}$$

a, b が共に自然数となるような最小の k は $k = 1 \quad \dots\dots\text{答}$

$$(3) \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 12k & \dots\dots\text{④} \\ 2ab = 5k & \dots\dots\text{⑤} \end{cases}$$

④と⑤について $k > 0$ と(1)の結果から $a^2 + b^2 = 13k \quad \dots\dots\text{⑥}$

④と⑥、 $a > b > 0$ より $a^2 = \frac{25}{2}k, b^2 = \frac{1}{2}k$

$$\therefore \frac{a^2}{b^2} = 25 \quad \text{より} \quad \frac{a}{b} = 5 \quad \dots\dots\text{答}$$

a, b が共に自然数となるような k のうち2番目に小さい k は

$2 \rightarrow 8 \quad \text{より} \quad k = 8$

このとき、 $a = 10, b = 2 \quad \dots\dots\text{答}$